Campeonato de Física 2022

Caio Augusto

12 de Julho

Problema 3 - Grupo C

Óptica nao Linear

Nesse problema, estudaremos óptica não linear - a área que estuda a propagação da luz em meios que não seguem as leis de dielétricos.
Inicialmente, vamos tratar de um caso simples que pode nos oferecer um insight de como um meio pode apresentar propriedades totalmente diferentes de um dielétrico comum.

Parte A - Campo Magnético forte em um meio dielétrico

Considere que uma onda eletromagnética de frequência ω se propaga por um meio material em uma direção definida como $+\hat{z}$. Esse meio material possui N elétrons por unidade de volume, e as partículas de carga positiva possuem uma massa tão grande que negligenciamos o seu movimento. Suponha que, quando um elétron sai da sua posição de equilíbrio por um vetor deslocamento $\vec{r}$, a sua atracão eletrostática ao núcleo gera uma força restauradora da forma

$$\vec{F} = -m_e\omega_0^2\vec{r}$$

onde m_e é a massa do elétron e ω_0 é uma frequência de oscilação natural do elétron.
Sabendo que, em geral, o elétron obedecera a equação de movimento:

$$m_e\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -e(\vec{E} + \frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{B}) - m_e\omega_0^2\vec{r} \tag{1}$$

A.1) Calcule o índice de refração do meio (assuma que a velocidade do elétron é, a todo momento, muito menor que a velocidade da luz, e que a solução homogênea da equação pode ser negligenciada).

Suponha que agora nós colocamos um campo magnético B_0 apontando na direção $+\hat{z}$. Assumindo que esse B_0 é muito mais forte que o campo magnético da onda propagante:

A.2) Mostre que o índice de refração da onda depende da sua polarização. Faça isso calculando o índice de refração para quando a onda está circularmente polarizada (no sentido horário ou anti-horário).

A.3) Suponha que agora nós temos uma onda linearmente polarizada, com o campo elétrico em z=0 sendo da forma $\vec{E} = E_0 e^{-i\omega t}\hat{x}$, onde x também é um eixo cartesiano perpendicular a z. Assumindo que a frequência da onda é muito maior que qualquer frequência característica do sistema, encontre o valor do campo elétrico em um z arbitrário, especificando o angulo no qual a polarização do campo rotacionou.

Com isso, podemos perceber que a propagação da luz pode não obedecer as leis padrões de meios dielétricos. Vamos analisar algumas das consequências dos resultados que obtemos:

Parte B - Mudança espaço-temporal do índice de refração

Considere o problema clássico onde temos uma onda linearmente polarizada se propagando por um eixo z, de forma que seu campo elétrico esta em x, seu campo magnético esta em y, e que em z=0, existe um contorno que separa dois meios que possuem índices de refrações diferentes, n_1 e n_2.
Sabemos que, devido a descontinuidade do índice de refração em z, uma onda transmitida e uma onda refletida surgem, e seus campos devem obedecer condições ao redor do contorno.

B.1) Assumindo que temos os campos elétricos incidente, refletido e transmitido sendo da forma:

$$E_i(z,t) = E_{0i} e^{i(k_i z - \omega_i t)}\hat{x}$$

$$E_r(z,t) = E_{0r} e^{-i(k_r z + \omega_r t)}\hat{x}$$

,

$$E_t(z,t) = E_{0t} e^{i(k_t z - \omega_t t)}\hat{x}$$

Escreva as condições de contorno entre os campos elétricos e magnéticos, e ache os valores de E_{0r}, E_{0t} k_r e k_t em função de E_{0i}, k_i) n_1 e n_2.

Como nós vimos na parte A, o índice de refração de uma onda pode depender de outras quantias além daquilo que forma o material (como o modulo de um campo magnético externo). Isso incita que, mudando essas quantias, podemos mudar criar uma descontinuidade no índice de refração no tempo, ao invés de em z. Considere novamente uma onda linearmente polarizada com as mesmas propriedades de antes, porem, agora a onda esta se propagando por um meio de índice de refração n_1, e em $t = 0$, o índice muda para n_2. Por consequência, apos a mudança, uma onda se propagando em $+z$ ainda existira, mas agora também tera uma onda refletida se propagando em $-z$.

B.2) Assumindo que temos os campos elétricos incidente, refletido e transmitido sendo da forma:

$$E_i(z,t) = E_{0i} e^{i(k_i z - \omega_i t)}\hat{x}$$

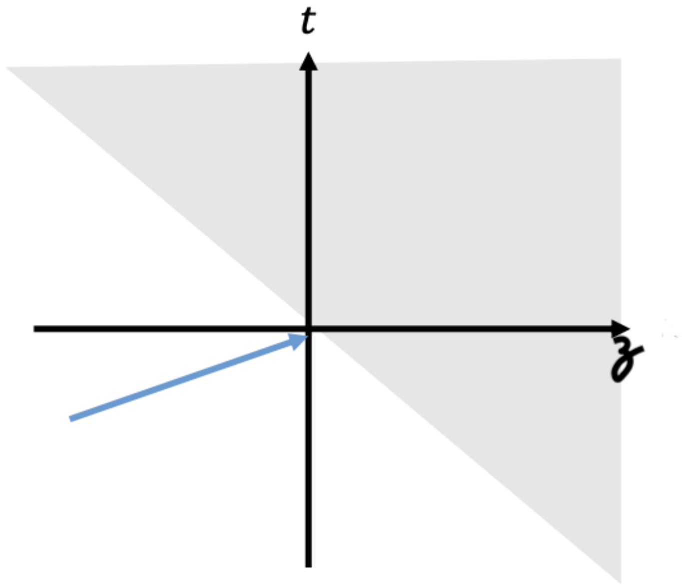
$$E_r(z,t) = E_{0r} e^{i(k_r z + \omega_r t)}\hat{x}$$

,

$$E_t(z,t) = E_{0t} e^{i(k_t z - \omega_t t)}\hat{x}$$

Escreva as condições de contorno entre os campos elétricos e magnéticos (seria uma boa ideia usar as equações de maxwell na forma de derivadas e pensar como as condições de contorno em B.1 podem ser explicadas por essas equações). Ache também os valores de E_{0r}, E_{0t} ω_r e ω_t em função de E_{0i}, ω_i n_1 e n_2.

No entanto, acontecer uma mudança instantânea em todos os pontos ao mesmo tempo envolveria um sistema extremamente complexo (pois a informação não pode se propagar mais rápido que a luz). Um método mais exato seria assumir que a mudança do índice de refracção é uma perturbação que se propaga. Ou seja, da mesma forma que antes nós assumimos que a descontinuidade no índice de refração era definido por $z = 0$, e depois que $t = 0$, agora assumimos que o contorno segue a forma: $z + ut = 0$.



Pontos na região cinza possuem n_2, já os pontos na região branca possuem n_1

B.3) Escreva as novas condições de contorno desse sistema. Nesse caso, apenas prove quais quantidades devem se manter conservadas antes e depois da descontinuidade. (Talvez seja uma boa ideia definir novas coordenadas para trabalhar com as equações de Maxwell)

Com isso, já podemos tivemos um exemplo de como efeitos não lineares podem mudar a propagação da nossa onda. No parte seguinte, iremos mais a fundo sobre o desenvolvimento fundamental para a ótica não linear.

Parte C - Termos não lineares

Suponha novamente que temos uma onda eletromagnética de frequência ω que se propaga por um meio material simétrico em uma direção definida como $+\hat{z}$, onde o campo elétrico é escrito como:

$$\vec{E} = E_0 e^{i(kz-\omega t)}\hat{x} + E_0 e^{-i(kz-\omega t)}\hat{x}$$

mas agora, o campo elétrico é tão forte, que a força restauradora é da forma:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -m_e\omega_0^2\vec{r} + m_e a(\vec{r}\cdot\vec{r})\vec{r}$$

Note que um termo de força da forma $F(x) = (m_e * b * x^2)\hat{x}$ quebraria a ideia de termos um meio simétrico. Por isso, assumimos que o próximo termo de força é um termo de terceira ordem.
A nova equação de movimento do elétron não possui uma solução simples, mas, assumindo que a força restauradora não linear é pequena, podemos usar da teoria de perturbações para falar que:

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2$$

onde $\vec{r}_1$ resolve a equação de movimento sem o termo não linear (a equação 1), e $\vec{r}_2$ aparece para resolver a equação:

$$m_e\frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = -m_e\omega_0^2\vec{r}_2 + m_e a(\vec{r}_1\cdot\vec{r}_1)\vec{r}_1$$

Poderíamos impor a existência de um $\vec{r}_3$ que resolve a equação devido ao termo da força não linear que vem de $\vec{r}_2$, mas esse termo é extremamente pequeno e pode ser negligenciado.
Sabendo que $\vec{r}_2$ é composto por múltiplos termos que oscilam com frequências diferentes:

C.1) Encontre o valor de $\vec{r}_2$ e explicite todos os termos de frequências diferente nele presente. (Assuma novamente que podemos ignorar a solução homogênea)

C.2) Podemos dizer que $\vec{r}_1$ causa um vetor de polarização $\vec{P}_L$ tal que

$$\epsilon_0\vec{E} + \vec{P}_L = n_0^2\epsilon_0\vec{E}$$

já $\vec{r}_2$ causa um $\vec{P}_{NL}$. Ache o valor de n_0 e encontre a nova equação de ondas do campo elétrico em função de $\vec{E}$, n_0, e $\vec{P}_{NL}$. Assuma que o divergente do campo elétrico é nulo.

Se focarmos na equação das ondas apenas para nosso campo inicial E_0 e negligenciamos os termos de P_{NL} que surge devido a outros campos (que por sua vez surgiram devido a E_0), podemos chegar em uma relação extremamente importante para ótica não linear.

C.3) Sabendo que k e ω estão relacionados por:

$$\frac{k}{\omega} = \frac{(n_0 + n_2E_0^2)}{c}$$

Onde $n_2E_0^2 \ll n_0$, ache o valor de n_2

Com isso, provamos que o campo elétrico se propaga normalmente mas com um índice de refracção proporcional ao quadrado de seu campo elétrico. Note que, caso um campo elétrico externo muito maior que E_0 é aplicado nesse meio, o índice de refração do meio vai depender primariamente desse campo externo, provando que é possível mudar o índice de refração de uma onda no tempo, como mencionado na parte B.
Note que também podemos usar nossas equações para provar o surgimento de ondas com as frequências encontradas em C.1. Diversos efeitos e fenômenos podem ser explicados a partir dessa teoria!