Campeonato de Física 2022

Vinicius Nevoa

17 de Setembro

Problema 3 - Grupo B

Ondas na água

Nesse problema estudaremos como oscilações na superfície livre de um corpo líquido plano podem ser modeladas mecânica e termodinamicamente. Os métodos desenvolvidos a seguir para a análise dessa situação física são de grande importância para o arsenal de um físico.

Parte A - Ondas na água

Imagine um corpo de água plano que se extende infinitamente. O campo gravitacional é uniforme e possui aceleração $\vec{g}$ ao longo do eixo z. O corpo líquido possui uma profundidade finita e uniforme h. Por fim, considerando a viscosidade do líquido desprezível, a velocidade desse fluido em cada ponto pode ser escrita como

$$\vec{v} = -\nabla\phi(x, y, z, t) \tag{1}$$

Em que $\phi(x, y, z, t)$ é chamado de potencial de velocidade, e assume-se que não há vórtices presentes. Também deve se assumir que a amplitude das ondas a é muito pequena.

A.1) Prove que $\nabla^2\phi = 0$. Assumindo que as ondas se propagam somente em uma direção na superfície, ache uma expressão para a dispersão $\omega(k)$ para o caso $h \to \infty$ e para o caso h finito. Assuma que a solução para essa equação diferencial é separável: $\phi = f(t)g(z)e^{ikx}$

A.2) Imagine que o fundo desse corpo de água não seja plano, mas sim ondulado com perfil

$$h(x) = A\cos(Kx) \tag{2}$$

Com $2\pi/K >> h >> A >> a$. Descreva matematicamente o perfil de ondas que se propagam:

1. Na direção x
2. Na direção y

Lembre-se de aplicar as aproximações devidas.

Parte B - Física Térmica

No limite em que a hidrodinâmica do problema se encontra em um regime linear, podemos tratar as pequenas ondas na superfície como uma gás de bósons livres, cujas propriedades térmicas podem ser extraídas com facilidade uma vez que eles não interagem entre si. Nessa parte do problema, considere que o fundo do corpo de água seja plano e de profundidade uniforme h e que as ondas se propagam somente ao longo da direção x.

B.1) Os autoestados de energia de um oscilador harmônico quântico de frequência angular ω são dados por

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \tag{3}$$

Para o caso de profundidade infinita, escreva a função de partição Z por unidade de área para o corpo de água em função de g, e uma integral sobre todos os número de onda k possíveis. Nota:

$$Z = \sum_E \exp -\beta E \tag{4}$$

B.2) Ache uma expressão para a entropia por unidade de área $\mathcal{S}$ e a calor específico por unidade de área C_A por causa das ondas nesse corpo líquido no caso infinitamente profundo. Recomenda-se calcular a energia livre de Helmholtz $F = -kT \ln Z$ primeiro.

B.3) Explique porque é válido usar uma expressão proporcional a $\hbar$ para modelar esse fenômeno clássico dessa forma. Explique também porque a expressão para E_n não faz referência a amplitude da onda a, enquanto para uma expressão clássica para a energia cinética vale que $E \sim a^2$. Em que limite um sistema quântico se comporta dessa forma?

As seguintes expressões podem ser úteis:

$$\int_0^\infty \ln\left(1 - e^{-x}\right) dx = -\frac{\pi^2}{6}$$

$$\int_0^\infty \ln\left(1 - e^{-\sqrt{x}}\right) dx = -2\zeta(3)$$

Em que $\zeta(s)$ é a função zeta de Riemann.