Campeonato de Física 2022

Ualype de Andrade Uchôa

17 de Setembro

Problema 3 - Grupo A

O caminho mais rápido

Introdução

Problemas de otimização de tempo são extremamente comuns em Física. Aqui, estudaremos o problema da curva Braquistócrona[1] fazendo o uso de analogias entre a mecânica clássica e a óptica geométrica. A versão original do problema proposta pelo matemático Johann Bernoulli (1667-1748) em 1696 pode ser enunciada da seguinte forma:

> *Qual é a curva que junta dois pontos fixos, a diferentes distâncias na horizontal e que não estão na mesma linha vertical, pela qual uma partícula móvel, sob a ação da gravidade, e começando o seu movimento no ponto superior, desce até o ponto inferior no menor tempo possível?*

A chave da nossa abordagem está na analogia óptico-mecânica. Da óptica geométrica, o princípio de Fermat nos diz que um raio de luz sempre toma o caminho que minimiza o tempo do trajeto. Apoiado nisso, Bernoulli imaginou que **o movimento da partícula na condição de tempo mínimo poderia ser análogo ao de um feixe de luz viajando em um meio no qual a sua velocidade se comporta igualmente à da partícula**, resolvendo o desafio que ele propunha para si e posteriormente para o resto da comunidade matemática.

Parte A - O problema clássico

Sejam A e B respectivamente os pontos de partida e chegada da partícula, a qual é solta do repouso de A. Os pontos estão conectados por meio de um trilho liso pelo qual a partícula se move. Considere um sistema cartesiano Oxy, com origem em A, no qual o sentido positivo do eixo vertical é o mesmo da gravidade $\vec{g}$. Defina φ como sendo o ângulo entre o vetor velocidade $\vec{v}$ da partícula e a aceleração da gravidade $\vec{g}$.

[1] Do grego brakhystós (o mais curto) e khrónos (tempo).

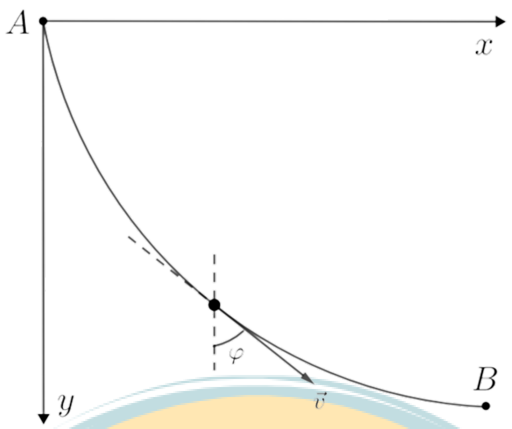

Figura 1: Esquema da situação proposta

Considere agora o movimento de um feixe de luz em um meio cujo índice de refração varia de forma contínua, sendo dependente da coordenada y apenas, i.e., $n = n(y)$. Utilizando a analogia citada, se o tempo de viagem da partícula entre os pontos A e B é mínimo, podemos afirmar que o comportamento de sua velocidade instantânea há de ser o mesmo da velocidade da luz em seu trajeto.

A.1) Determine $n(y)$, a menos de um fator constante.

A.2) Usando a Lei de Snell, mostre que:

$$\frac{\sin\varphi}{\sqrt{y}} = \text{constante}$$

A relação encontrada no item anterior é uma propriedade de uma famosa: a cicloide. A cicloide é uma curva que pode ser gerada a partir de uma situação clássica em mecânica: o rolamento perfeito de um círculo em um plano horizontal. O movimento de um ponto qualquer na periferia do círculo em relação ao solo traça a curva em questão.

A.3) Verifique, com cálculos, que o movimento de um ponto na periferia de um círculo em rolamento perfeito sobre o eixo x obedece à propriedade encontrada no item passado.

Assim, concluímos que o formato do trajeto entre A e B tal que o tempo é mínimo é um arco de cicloide. Para aplicar o resultado encontrado, tome agora o caso particular no qual A e B estão sobre o eixo x e distam de D entre si.

A.4) Sendo r_0 o raio do círculo associado à trajetória da partícula de A a B na situação de tempo mínimo, determine r_0 em termos de D, bem como o módulo da velocidade do seu centro v_0 em termos de g e D.

A.5) Determine o tempo mínimo necessário para a partícula ir de A até B, em termos de g e D.

Parte B - Uma nova versão do problema

Imagine agora uma esfera de raio R e massa M homogeneamente distribuída pelo seu volume. A aceleração gravitacional na superfície da esfera vale g. Um túnel liso e estreito é construído em seu interior, conectando o Polo Norte (A) e um ponto (B) no equador da esfera. Uma pequena partícula é abandonada do repouso de A, e o túnel é construído de tal forma que o tempo gasto para chegar até B através do túnel é o menor possível. Encontraremos aqui, analogamente à parte A, o formato do trilho que torna isso possível, bem como o tempo necessário para a travessia.

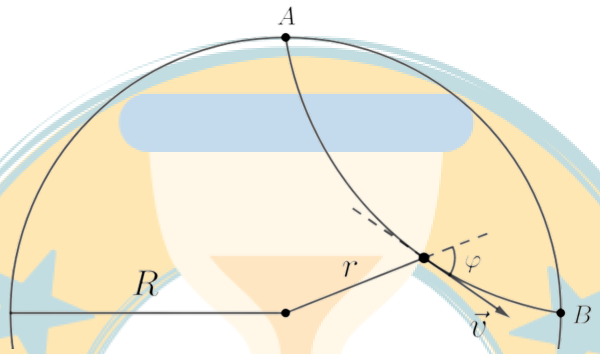

Figura 2: Esquema da situação proposta

B.1) **(i)** Determine a força sentida pela partícula em termos de g, R e r, quando a partícula encontra-se a uma distância $r \leq R$ do centro. **(ii)** Determine o módulo de sua velocidade $v = v(r)$, em termos de g, R e r.

Novamente, utilizaremos a analogia óptico-mecânica e estudar o movimento de um raio de luz em um meio no qual o índice de refração varia de forma contínua, já que ele levará o menor tempo possível para fazer a travessia. Agora, o índice de refração do meio será dependente apenas da coordenada radial r, i.e., $n = n(r)$. Seja φ o ângulo entre a velocidade da partícula $\vec{v}$ e a linha radial.

B.2) Usando a Lei de Snell, encontre uma relação entre n, r e φ.

B.3) Por meio da analogia óptico-mecânica, mostre que:

$$\frac{r \sin \varphi}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \text{constante}$$

A relação que você achou no item anterior é uma propriedade de uma curva chamada de hipocicloide, a qual é gerada de maneira similar à cicloide. O movimento de um ponto qualquer na periferia de um círculo de raio r_0 em rolamento perfeito na superfície interna de outro círculo de raio $R > r_0$ traça a curva em questão.

B.4) Determine, por fim, o tempo mínimo de travessia entre A e B, em termos de g e R.

OBS: Em sua solução de B.4), você não precisa **necessariamente** verificar que a hipocicloide obedece à propriedade mostrada em B.3).