Campeonato de Física 2022

Vinicius Nevoa

10 de Setembro

Problema 2 - Grupo C

Horizontes de Evento e Radiação Hawking

A Teoria da Relatividade Geral é uma das construções teóricas mais elegantes de toda a física, principalmente porque é capaz de gerar predições precisas para uma vasta gama de fenômenos - da formação de estrelas e galáxias à radiação gravitacional. Contudo, nós sabemos que o mundo em que vivemos é quântico, e a Relatividade Geral sofre de um grave problema quando vista como uma Teoria Quântica de Campos: por não ser renormalizável, ela não é capaz de predizer fenômenos que acontecem em uma escala de energia próxima da energia de Planck, $M_{pl} \approx 10^{19}$ GeV.

Em um trabalho seminal no ano de 1974, Stephen Hawking obteve uma previsão semiclássica que mudou a forma como entendemos buracos negros. Hawking descobriu que horizontes de evento necessariamente irradiam partículas elementares, ainda que nada possa escapar da região do espaço-tempo delimitada por eles. Esse resultado, juntamente com a entropia de Bekenstein, chamou a atenção para a física próxima de horizontes e abriu portas para grande parte das empreitadas modernas que buscam uma teoria quântica da gravitação.

Nesse problema, iremos estudar o espectro térmico de bósons de massa $m = 0$ irradiados por um buraco negro de Schwarzschild de massa M. Unidades naturais $c = \hbar = 1$ são usadas onde apropriado.

Usaremos também, em passagem, os conceitos de infinito passado nulo $\mathcal{I}^-$ e infinito futuro nulo $\mathcal{I}^+$. $\mathcal{I}^-$ é o passado infinitamente distante de todos os objetos que viajam à velocidade da luz (ou seja, os que tem $m = 0$) e $\mathcal{I}^+$ é o respectivo futuro. Pense nesses infinitos como o fim da linha para todos os raios de luz.

Parte A - O Horizonte de Eventos

Corpos astrofísicos acima de uma certa massa necessariamente sofrem colapso gravitacional completo, formando uma singularidade em $r = 0$ e um horizonte de eventos em $r = 2GM$, caso não haja rotação ou cargas. Caso haja, a posição do horizonte é outra, mas isso não nos interessa. A métrica do espaço-tempo ao final disso é a *métrica de Schwarzschild*

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2 - r^2 d\Omega^2 \tag{1}$$

A verdade é que, por força do *Teorema de Birkhoff*, a métrica acima é a *única* solução para o vácuo esfericamente simétrico das equações de Einstein, havendo ou não buraco negro. Ou seja, essa é métrica no espaço exterior a uma estrela (mas não é a métrica dentro da estrela, pois lá há matéria e não vácuo!). O que há de especial com buracos negros se a métrica que eles geram é mesma de qualquer estrela? A resposta é que há a formação de um horizonte de eventos, que descrevemos a seguir.

Define-se o horizonte de evento futuro como o contorno do passado causal do infinito nulo futuro, denotado $\mathcal{I}^+$. Dada condições razoáveis, todo horizonte de eventos é a superfície nula de algum vetor de Killing, então tomaremos isso como nossa definição de horizonte. Um vetor de Killing é aquele que induz isometrias da métrica. Por exemplo, a métrica acima não possui nenhum coeficiente que depende do tempo, portanto o vetor $\xi = \xi^\mu \partial_\mu = \partial_t$, que gera translações no tempo, é uma isometria. A condição de superfície nula é $g(\xi, \xi) = \xi_\mu \xi^\mu = 0$

A.1) Prove que há um horizonte de eventos em $r_s = 2GM$. Prove também, nessa mesma linguagem, que qualquer coisa que esteja em uma distância $r < r_s$ necessariamente cai em direção a singularidade em $r = 0$ em um tempo finito. Lembre-se que ξ induz isometrias do espaço-tempo.

A.2) Prove que o tempo próprio que leva para um objeto em queda livre desde $r = r_s$ alcance a singularidade é

$$\tau = \frac{\pi GM}{c^3} \tag{2}$$

Parte B - Radiação de Hawking

Em teorias quânticas em um espaço-tempo curvo, a própria ideia de partícula depende do observador. Isto é, enquanto em um espaço-tempo plano ($ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\Omega^2$) todos os observadores concordam com número de partículas que há em uma caixa, o mesmo não vale para espaço-tempo curvos: cada observador conta um número diferente de partículas. A intuição por trás disso está no coração da radiação de Hawking. O que acontece é que para quantizarmos a energia associada a uma partícula é preciso definir um direção temporal, para então dizer que certa energia é *positiva* $+E$. Fora de um buraco negro, podemos usar o vetor de Killing acima para definir a direção que o tempo flui. Contudo, ao cruzar o horizonte de eventos, vimos que esse vetor de Killing vira um vetor espacial. Quando o módulo de ξ troca de sinal, a energia que era positiva se torna *negativa*, $-E$, reduzindo a massa do buraco negro para $M' = M - E$. Um observador de fora fica com a impressão que a partícula que não cruzou o horizonte de eventos representa o buraco negro evaporando, e esta é a celebrada *radiação de Hawking*.

Considere a seguinte expansão para o bóson ϕ no passado nulo infinito $\mathcal{I}^-$:

$$\phi = \sum_k \left(f_k a_k + f_k^* a_k^\dagger \right) \tag{3}$$

Após interagir com o horizonte de eventos, os coeficientes f_k se tornam F_k (em $\mathcal{I}^+$), definidos por

$$f_q = \sum_k (\alpha_{qk} F_k + \beta_{qk} F_k^*) \tag{4}$$

Para os quais vale

$$\phi = \sum_k \left(F_k b_k + F_k^* b_k^\dagger \right) \tag{5}$$

Define-se o vácuo inicial por $a_k |0_i\rangle = 0$ e o vácuo final por $b_k |0_f\rangle = 0$. Por fim, é sempre possível normalizar os coeficientes α e β de modo que

$$\sum_k (\alpha_{nk} \alpha_{mk}^* + \beta_{nk} \beta_{mk}^*) = \delta_{nm} \tag{6}$$

B.1) Prove que o processo que converte f em F produz o seguinte número de partículas de momento p a partir do vácuo inicial em $\mathcal{I}^-$:

$$N_p = \langle 0_i | b_p^\dagger b_p | 0_i \rangle = \sum_k |\beta_{kp}|^2 \tag{7}$$

Feito isso, vou explicar com mais detalhes como computar os coeficiente α e β para um buraco negro de Schwarzschild, mas já adianto a resposta que nos interessa:

$$|\alpha_{\omega\omega'}| = e^{4\pi M \omega} |\beta_{\omega\omega'}| \tag{8}$$

A prova disso constará na solução do problema, mas não é exigida de vocês. Vai uma breve explicação:

Observe a figura 1 abaixo. Como queremos a radiação de Hawking para um buraco negro estável, estamos interessados nos componentes de frequência muito altos em $\mathcal{I}^-$ que sofrem um desvio para o vermelho ao passar muito próximos do horizonte de eventos H^+ ($v \sim v_0$ na figura). A razão é que modos normais que passam longe do horizonte de eventos representam um fluxo de energia contínuo de $\mathcal{I}^-$ para $\mathcal{I}^+$, o que não nos interessa. E modos de frequência baixa que passam perto de H^+ sofrem um redshift tão grande que se tornam insignificantes.

Para esse modos de altíssima frequência, podemos usar o conceito de raios

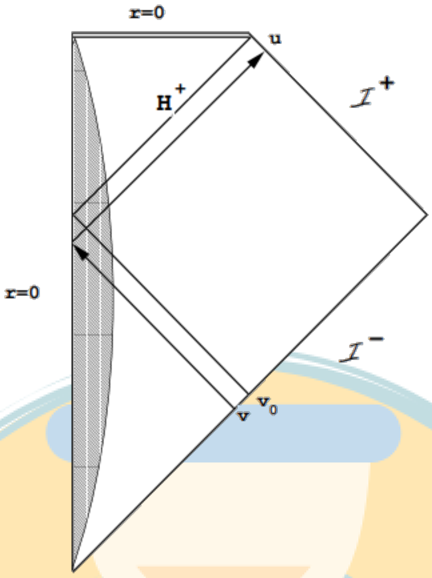

Figura 1: Diagrama de Penrose para o espaço-tempo na presença de um objeto sofrendo colapso gravitacional esfericamente simétrico. A região cinza é o interior desse objeto. Veja que, após o fim do colapso, a singularidade em $r = 0$ se extende na direção espacial e faz uma *sombra* em $\mathcal{I}^+$. A borda dessa sombra é o horizonte de eventos futuro H^+, como definimos no texto acima do item A.1

como em ótica geométrica (em que a lente é a geometria curva do espaço-tempo) e achar a relação entre o raio nulo incidente e o emergente, o que fixa a relação entre os modos normais e consequentemente α e β, obtendo a equação 8.

B.2) Use a equação 8 para mostrar que o horizonte de eventos irradia partículas com distribuição energética

$$N(\omega) = \frac{1}{e^{8\pi M\omega} - 1} \tag{9}$$

B.3) Estime quanto tempo um buraco negro de massa M leva para evaporar completamente em função de M e constantes da natureza. É aceitável deixar a resposta em unidades naturais.

Pode ser útil que

$$\int_0^R \left(\frac{R}{x} - 1\right)^{-1/2} dx = \frac{\pi R}{2} \tag{10}$$

$$\int_0^\infty \frac{x}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^2}{6} \tag{11}$$