Campeonato de Física 2022

Vinícius Ferreira

3 de Setembro

Problema 1 - Grupo A

Pensando como Einstein

O propósito deste problema é desenvolver os conceitos básicos de Relatividade - Restrita e Geral - a partir de conhecimentos fundamentais da Física Clássica, na qual se fundamenta o estudo física feito nos ensinos fundamental e médio.

Parte A - Relatividade Restrita e a Dilatação do Tempo

A. Contextualizando

Até o momento, sabe-se que a velocidade e a aceleração de objetos vistos por diferentes referenciais são relativas, ou seja, dependem do referencial. Por exemplo, para alguém que está parado na rua, a velocidade de um certo ônibus é diferente de zero, mas o ônibus não se move em relação a alguém que está dentro do ônibus, resultando em uma velocidade relativa nula para o referencial que se move junto ao ônibus.

Contudo, a partir de agora, **o espaço e o tempo também são relativos**, ou seja, distâncias e intervalos de tempo são percebidos/medidos de forma diferente para referenciais diferentes (com velocidades distintas). Porém, acima de tudo, **a velocidade da luz é invariante para todos os referenciais!**

Agora, nota-se que a luz pode ser vista percorrendo caminhos diferentes por diferentes referenciais, mas com a mesma velocidade c, como no exemplo do vagão de trem a seguir.

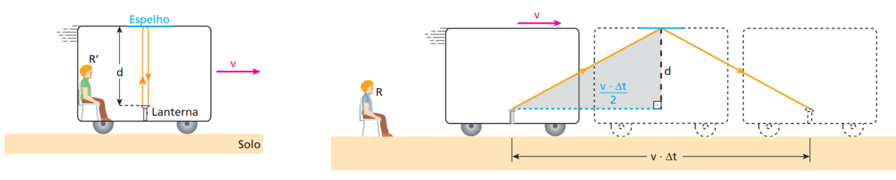

Figura 1: À esquerda, o feixe de luz visto pelo referencial R'. À direita, o feixe visto pelo referencial R. Imagens retiradas do livro "Tópicos de Física - Volume 3"

A. Vamos ao problema em si

Considere dois observadores, um em repouso em relação ao solo e outro em movimento dentro de um vagão de trem cuja velocidade v em relação ao solo é comparável à velocidade da luz c. O observador em movimento vê, em seu referencial R', um laser ser disparado verticalmente e ser refletido por um espelho preso ao teto do vagão. Por outro lado, quem vê de fora, no referencial R em repouso, enxerga o caminho do raio emitido pelo laser de forma inclinada devido ao movimento do vagão.

A.1) Determine a relação entre o tempo medido pelo referencial em movimento $\Delta t'$ e o tempo medido pelo referencial em repouso Δt. Deixe sua resposta em função do Fator de Lorentz γ, que é definido como:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

A.2) A partir dessa relação, pode-se dizer que referenciais com velocidades mais próximas à da luz percebem o tempo passar mais rápido ou mais devagar?

Com isso, percebe-se que corpos em movimento percebem o tempo de forma diferente em relação aos que estão em repouso - ou com velocidade diferente.

Entretanto, no início do século XX, Albert Einstein traçou uma analogia entre objetos acelerados e corpos na presença de um campo gravitacional, que daria origem a uma ideia ainda mais abrangente sobre a relatividade do tempo, a Relatividade Geral.

Parte B - Princípio da Equivalência de Einstein

B. Contextualizando

A tal analogia idealizada por Einstein partia do princípio de que, se um corpo em movimento percebe o tempo de forma diferente, um corpo em um campo gravitacional também percebe, por se tratar de um campo de acelerações, uma região que tende a gerar movimento nos objetos. Em outras palavras, um referencial acelerado é análogo a um referencial na presença de um campo gravitacional e vice-versa. Por exemplo, quando você está dentro de um elevador que acelera para cima, você tende a se sentir mais pesado, como em um campo gravitacional mais intenso.

B. Vamos ao problema em si

Agora, será sua vez de tentar construir essa mesma ideia em passos. Considere dois observadores separados apenas verticalmente por uma altura h. O observador de cima emite um feixe contínuo de luz cuja frequência medida por ele é f' em direção ao observador abaixo dele. Devido aos efeitos relativísticos da gravidade local g, o observador que recebe o feixe de luz vindo de cima percebe a luz com uma frequência diferente f.

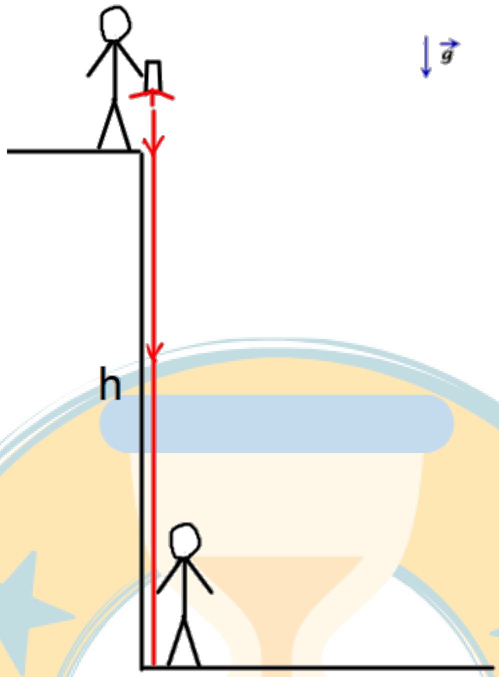

Figura 2: Representação esquemática do sistema da parte B. Tamanhos fora de escala.

B.1) Para pequenas distâncias h, o efeito relativístico de dilatação do tempo gerado pela aceleração da gravidade pode ser determinado por meio de uma analogia envolvendo o Efeito Doppler e um sistema muito parecido com a gravidade. Proponha essa analogia e calcule a relação entre os intervalos de tempo Δt medido pelo observador no nível mais baixo e $\Delta t'$ medido pelo observador no nível mais alto em função de g, h e c. Considere que h pode ser, por hora, arbitrariamente pequeno.

B.2) O resultado encontrado indica que quanto mais próximo de um astro (planeta, estrela, buraco negro, etc), o tempo passa mais rápido ou mais devagar? Justifique.

Parte C - Relatividade Geral

C. Contextualizando

O que foi calculado na parte anterior é apenas uma aproximação para pequenas distâncias h e gravidade constante, o que é muito semelhante à aproximação mais usual da dilatação térmica para coeficientes de dilatação α constantes e variações de temperatura ΔT não tão grandes, já que a real - mais geral - relação de dilatação é, na verdade, uma função exponencial.

C. Vamos ao problema em si

C.1) A partir da relação de dilatação do tempo encontrada no item anterior para pequenas distâncias, encontre e demonstre a expressão geral para essa relação para quaisquer distâncias h (ainda para uma gravidade uniforme g).

C.2) Agora, tem-se a equação para a dilatação temporal para um campo gravitacional uniforme. Porém, pode-se ir além e encontrar a expressão geral para o campo gravitacional de um astro qualquer (em geral esférico). Voltando à aproximação de pequenas distâncias, demonstre que a expressão geral da dilatação do tempo para um astro esférico entre dois pontos - um a uma distância r_1 do centro do astro e outro a uma distância r_2 - é

$$\Delta t' = \Delta t(r_2) = \Delta t(r_1)\; e^{\frac{GM}{c^2}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)} ,$$

em que G é a constante da gravitação universal e M é a massa do astro.

DICA: Pode ser útil usar a aproximação

$$\ln(1+x) \approx x \;;\; x \ll 1$$

Além disso, recomenda-se estudar alguns conceitos de somatório e integral para chegar ao resultado final, mas **não haverá penalidade caso deixe em função de uma soma**, ou seja, não será exigido o uso de cálculo diferencial e integral (apesar de ser incentivado), **o importante será a ideia necessária para chegar à fórmula proposta**.

C.3) Mais uma vez, diga se o resultado encontrado acima indica que quanto mais próximo de um astro (planeta, estrela, buraco negro, etc), o tempo passa mais rápido ou mais devagar? Justifique.