Campeonato de Física 2021

Vinicius Névoa

19 de Julho

Problema 3 - Grupo C

A importância da dimensão em teorias de campo

Nesse problema vamos explorar a importância do número de dimensões espaciais em uma Teoria Estatística de Campos *Clássicos*. Uma larga classe de problemas podem ser resolvidos usando uma técnica chamada *teoria de campo médio*, que consiste em escrever a função de partição em termos de um parâmetro macroscópico chamado **parâmetro de ordem**. Tipicamente, a função de partição dependeria apenas de parâmetros microscópicos $\vec{s}_i$, mas aqui forçaremos sua escrita como:

$$Z = \sum_{\phi(\mathbf{x})} \sum_{\vec{s}_i | \phi(\mathbf{x})} e^{-\beta E[\vec{s}_i]} := \sum_{\phi(\mathbf{x})} e^{-\beta F[\phi(\mathbf{x})]}$$

Costuma-se referir à função F acima como energia livre de Landau-Ginzburg, e ela é definida como a função que satisfaz essa relação matemática. No que segue, estudaremos um sistema de spins $-\frac{1}{2}$ em d dimensões, e o parâmetro de ordem $\phi(\mathbf{x})$ mais relevante para parametrizar a função de partição é a magnetização local $m(\mathbf{x})$.

Suponha que haja um campo magnético $\vec{B}$ no espaço tal que a energia total seja:

$$H = -J \sum_{i,j} s_i s_j + B \sum_i s_i$$

a) Aqui, assuma que a magnetização é global, ou seja, sem variação espacial: $m(\mathbf{x}) = m$ e que $B = 0$. Ache a energia livre $F[m]$ até quarta ordem em m e identifique uma temperatura crítica T_c (em função de parâmetros dados) abaixo da qual o estado fundamental sofre uma quebra espontânea de simetria (isto é, surge uma magnetização não nula m_0).

b) Argumente o porque esse modelo não exibe comportamento ferromagnético se $d = 1$. Explique também porque não há quebra de simetria se houver algum campo magnético presente.

Caso o parâmetro de ordem tenha alguma variação espacial, devemos incluir um termo de gradiente na energia livre acima:

$$F[m(\mathbf{x})] = \nabla m(\mathbf{x}) \nabla m(\mathbf{x}) + \alpha m(\mathbf{x})^2 + \gamma m(\mathbf{x})^4$$

Esse gradiente deve aparecer ao quadrado pelo mesmo motivo que o termo de m^3 não está presente .

c) Considerando agora que haja um campo magnético $B(\mathbf{x})$, calcule a *função de correlação conectada de 2 pontos*, que relaciona uma flutuação na magnetização em $\mathbf{x}$ com uma em $\mathbf{y}$:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle (m(\mathbf{x}) - m_0)(m(\mathbf{y}) - m_0) \rangle$$

Esse objeto é também chamado de *Função de Green*, e é de importância universal na Teoria Quântica de Campos, pois representa a amplitude de probabilidade de uma partícula viajar de $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ (linhas sólidas nos diagramas de Feynman). O que acontece com a função de Green próximo da temperatura crítica T_c?

d) Calcule a 'massa' dessas excitações (tradicionalmente, a massa surge como o coeficiente de ϕ^2).

e) Mostre que essa teoria de campo médio só preve flutuações pequenas ($\langle m^2 \rangle << \langle m \rangle^2$) acima de uma certa dimensão crítica d_c.