Campeonato de Física 2021

Vinicius Névoa

19 de Julho

Problema 3 - Grupo B

O Problema mais simples

Tipicamente, quando partículas possuem posições no espaço, precisamos de um conjunto infinito de pontos para representar sua trajetória, uma vez que o espaço é contínuo. Contudo, se os graus de liberdade que analisarmos possuirem um número finito de valores acessíveis, tudo fica muito mais simples. E nada pode ser mais simples do que uma partícula com spin 1/2: em toda a natureza, é o sistema físico com menos graus de liberdade, possuindo apenas 2: spin para baixo e spin para cima. Mas, afinal, o que é spin? Ningúem sabe ao certo, e, de verdade, não importa muito. Tudo o que importa é que o spin de uma tal partícula pode ser representado como um vetor, as vezes chamado de *spinor*:

$$\chi = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Continuando, os objetos matemáticos que agem em vetores 2×1 são matrizes $2{\times}2$, e os possíveis valores de cada quantidade são os autovalores dessas matrizes. As que correspondem à física do spin são três matrizes, definidas pela relação $[S_i, S_j] = S_iS_j - S_jS_i = i\hbar S_k$:

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; S_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}; S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Um elétron possui spin ao longo do eixo z positivo. O que acontece se você girá-lo por um ângulo de 2π ao redor do eixo z? Use isso para explicar como estrelas de nêutron podem existir.

A terceira situação mais simples que existe na natureza (qual seria a segunda?)

é quando temos *duas* partículas com spin 1/2 interagindo. O estado delas precisa ser um vetor 4×1 e a física está contida em matrizes 4×4. Se denotarmos $+$ o spin para cima e $-$ o spin para baixo de cada partícula (ao longo de z), as 4 bases mais apropriadas são:

$$|++\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle, |--\rangle$$

b) Duas partículas interagem de forma completamente anisotrópica, segundo constantes J_x, J_y, J_z e a equação de Schrodinger $H|\chi\rangle = E|\chi\rangle$, com:

$$H = J_x S_x^{(1)} S_x^{(2)} + J_y S_y^{(1)} S_y^{(2)} + J_z S_z^{(1)} S_z^{(2)}$$

Veja que $S^{(1)}$ e $S^{(2)}$ agem somente nos estados das partículas 1 e 2, respectivamente. Ache a matriz H e os 4 valores de energia permitidos para esse sistema.

c) Discuta qualitativamente a condição sobre J_x, J_y e J_z para que o sistema anterior seja um bom candidato para *computador quântico*. O que pode dar errado?

d) Oh no! Surge um campo magnético externo parasita no seu sistema de spins, e ele aponta na direção z. Isso introduz um termo $H' = B(S_x^{(1)} + S_x^{(2)})$ no Hamiltoniano, com $B << J_z \hbar$. Isso ajuda ou atrapalha seu computador quântico? Analise o que essa perturbação faz com as energias acessíveis.